ОПТИМИЗАЦИЯ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ РЕБРИСТЫХ ПЛАСТИН С ОГРАНИЧЕНИЕМ ПЕРВОЙ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ПРИ УПРАВЛЕНИИ ВЫСОТОЙ И ШИРИНОЙ ПОПЕРЕЧНОГО СЕЧЕНИЯ РЁБЕР

О.О. Кондратенко
Научный руководитель: профессор, д.т.н. Р.П. Моисеенко
Томский государственный архитектурно-строительный университет,
Россия, г. Томск, пл. Соляная 2, 634003
E-mail: olg-kond@yandex.ru

OPTIMIZATION OF RECTANGULAR RIBBED PLATES WITH THE CONSTRAINT OF THE FIRST NATURAL FREQUENCY WITH THE HEIGHT CONTROL AND THE TRANSVERSE WIDTH OF THE RIBS

O.O. Kondratenko
Scientific Supervisor: Professor, Ph. D. R. P. Moiseenko
Tomsk state university of architecture and building, Russia, Tomsk, 2, Solyanaya Pl., 634003
E-mail: olg-kond@yandex.ru

Abstract. *The presented algorithm of optimization of rectangular ribbed plates at a predetermined first natural frequency. As control parameters are taken the width and height of the rectangular cross section of the ribs. Formulated new property of optimality by varying the height and width of the cross section of the ribs. Based on the property of optimality is composed of the iterative algorithm has a stable convergence. The examples show that it can be obtained a substantial saving of material.*

Оптимизация пластин, как научное направление, началась с работ по определению формы пластины. Важный вывод из теоретических разработок этого начального периода сделали К.А. Лурье и Н. Ольхофф: минимум веса пластин при заданной первой частоте собственных колебаний существует на множестве ребристых пластин с заданной постоянной толщиной пластины.

Работы прикладного значения по оптимизации ребристых пластин разделились на две группы. В первой группе рассматриваются пластины с рёбрами, симметричными относительно срединной плоскости. Во второй группе работ по оптимизации ребристых пластин рассматриваются односторонние рёбра. Этот вариант ребристых пластин наиболее часто встречается в качестве элементов строительных конструкций. Экспериментально и теоретически доказано, что пластины с односторонними рёбрами имеют наибольшую прочность и жёсткость. Этот вывод обоснован в работах В.А. Крысько, Т.А. Бочкарёвой, В.А. Постнова, Г.А. Тумишина, Р.Д. Степанова и др.

В многочисленных работах по оптимизации ребристых пластин учтены ограничения по прочности, жесткости, устойчивости. Ограничение по первой частоте собственных колебаний использовано в работе Ю.М. Почтмана, но расположение ребер принято симметричным относительно срединной плоскости. Впервые ограничение по первой частоте с односторонними ребрами реализовано в работах Р.П. Моисеенко [1,2]. В качестве параметров управления приняты или ширина поперечного сечения ребер или высота.

В данной работе впервые рассматривается оптимизация ребристых пластин с заданной первой частотой собственных колебаний при управлении шириной и высотой поперечных сечений рёбер. Решение поставленной задачи позволяет достичь большей экономии материала, т.к. увеличение параметров управления в соответствии с первой теоремой ОПК (оптимальное проектирование конструкций) приводит к уменьшению целевой функции [3].

Постановка задачи. Рассматривается прямоугольная тонкая пластина постоянной заданной толщины (h) с шарнирными опорами. Пластина подкрепляется односторонними рёбрами прямоугольного поперечного сечения, как показано на рис.1.

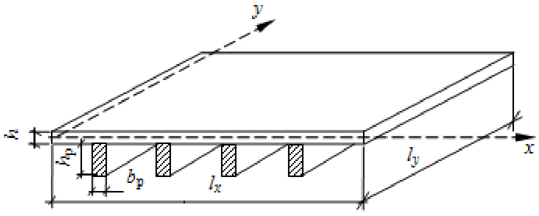

Рис.1. Расчётная схема ребристой пластины

Материал – упругий, однородный, изотропный. Относительная ширина сечения рёбер – $B = b_p / l_x$. Относительная высота поперечного сечения рёбер – $H = h_p / h$.

Минимизация веса рёбер проводится при ограничении первой частоты собственных колебаний пластины:

$$\omega_1 = \overline{\omega} \tag{1}$$

Значение $\overline{\omega}$ задаётся из спектра частот собственных колебаний пластины без рёбер.

Практически условие (1) реализуется с помощью уравнения частот собственных колебаний.

$$D^* = 0 \tag{2}$$

где D^* – определитель линейных алгебраических уравнений, получаемых энергетическим методом при аппроксимации прогибов (w) рядом:

$$w = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \sin\left(\frac{i\pi x}{l_x}\right) \sin\left(\frac{j\pi y}{l_y}\right) \tag{3}$$

Решение задачи. Общий метод решения поставленной задачи оптимизации основан на применении особых свойств оптимальных конструкций. Это свойство формулируется с помощью метода Лагранжа.

Функция цели – это минимум веса рёбер.

$$F = \sum_{i=1}^{k} B_i H_i - \min \tag{4}$$

Функция Лагранжа в соответствии с ограничением (2) записывается в виде

$$L = \sum_i B_i H_i - \lambda D^* \quad 5)$$

Минимум функции L (5) достигается при условиях:

$$\frac{\partial L}{\partial B_i} = H_i - \lambda \frac{\partial D^*}{\partial B_i} = 0 \quad 6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial H_i} = B_i - \lambda \frac{\partial D^*}{\partial H_i} = 0 \tag{7}$$

Из уравнений (6) и (7) получается условие:

$$\frac{\partial^2 D^*}{\partial B_i \partial H_i} = \frac{1}{\lambda} = const \tag{8}$$

Таким образом, получено условие оптимальности (8) ребристой пластины при варьировании высотой и шириной поперечных сечений рёбер.

Для организации вычислительного процесса параметры H_i и B_i выражаются по формулам:

$$H_i = c_i H \tag{9}$$

$$B_i = d_i B \tag{10}$$

1. В первом приближении задаются числа $c_i = 1$, $d_i = 1$ и значение параметра $B = B_0$.
2. Условие (2) записывается в развёрнутом виде

$$\left| U_0 + BH^3 \sum_{i=1}^{k} d_i c_i^3 U_i - \overline{\lambda}\left(T_0 + BH \sum_{i=1}^{k} c_i d_i T_i \right) \right| = 0 \tag{11}$$

где $\overline{\lambda} = \rho h l_x^2 \overline{\omega}^2 / D$; U_i – матрица потенциальной энергии деформации i – го ребра; T_i – матрица кинетической энергии i – го ребра; U_0 – матрица потенциальной энергии деформации пластины без рёбер; T_0 – матрица кинетической энергии пластины без рёбер; D – цилиндрическая жёсткость пластины.

Из уравнения (11) определяется наибольший корень H.

3. При известных значениях B и H вычисляются производные (8).
4. Вычисляется среднее значение вторых производных (8).
5. Вычисляются новые значения коэффициентов c_i и d_i по формулам:
6. При известных значениях c_i, d_i и H из уравнения (11) определяется B.

Выводы:

1. Сформулированы два новых условия оптимальности ребристых пластин при заданной первой частоте собственных колебаний. Эти условия оптимальности имеют самую общую в строительной механике энергетическую основу. В известных курсах строительной механики производные от энергии по геометрическим параметрам поперечных сечений не используются, поэтому физический смысл этих производных пока не ясен. Однако применение вторых смешанных производных от полной энергии или от определителя системы уравнений дает возможность составить простой, эффективный алгоритм решения сложной задачи оптимизации.
2. Достоверность результатов показана на теоретическом уровне. Оптимальные проекты, полученные по двум различным алгоритмам, совпали.
3. В представленном виде алгоритм может быть использован для оптимизации металлических пластин.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Моисеенко Р.П. Свойства ребристых пластин минимального веса при заданной первой частоте собственных колебаний // Изв. вузов. Строительство. – 2003. – № 2. – С. 16 – 19.
2. Моисеенко Р.П., Ботьева И.А. Оптимизация прямоугольных ребристых пластин с заданной первой частотой собственных колебаний при управлении высотой рёбер. – М.: Известия. Строительная механика и расчёт сооружений. – 2011. – № 3. – С. 66 – 69.
3. Ляхович Л.С. Особые свойства оптимальных систем и основные направления их реализации в методах расчёта сооружений. // Изд. ТГАСУ. – 2009. – 352 с.